

## Grundlegende Definitionen

**Definition 1** Ein (endlicher) **Graph**  $G$  ist ein Paar  $(V(G), E(G))$ .  $V(G)$  ist eine endliche nichtleere Menge von Knoten.  $E(G)$  ist eine Menge zweielementiger Teilmengen von  $V(G)$  welche Kanten in  $G$  repräsentieren.

**Definition 2** Die Anzahl  $p = |V(G)|$  der Knoten von  $G$  heißt **Ordnung** von  $G$ .

**Definition 3** Die Anzahl der zu einem Knoten  $v$  inzidenten Kanten  $d_G(v)$  heißt **Grad** des Knoten  $v$ .  $\Delta(G)$  bezeichnet den **maximalen Grad** aller Knoten von  $G$ .

**Definition 4**  $K_p$  bezeichnet einen **vollständigen Graphen** der Ordnung  $p$ , in dem alle Knoten paarweise adjazent sind.

**Definition 5**  $C_p$  bezeichnet einen **Kreis** der Ordnung  $p$ .

**Definition 6** Für eine Menge von Knoten  $V' \subseteq V$  bezeichnet  $\langle V' \rangle$  den von  $V'$  **induzierten Teilgraphen** mit der Knotenmenge  $V'$  und den Kanten aus  $G$ , die nur mit Knoten aus  $V'$  inzidieren.

**Definition 7** Eine Knotenmenge  $S \subseteq V$  heißt **stabil** wenn  $\langle S \rangle$  keine Kanten enthält. Die Mächtigkeit der größten stabilen Menge in  $G$  heißt **Stabilitätszahl** und wird bezeichnet mit  $\alpha(G)$ .

**Definition 8** Eine Knotenmenge  $C \subseteq V$  heißt **Clique** wenn  $\langle C \rangle$  vollständig ist. Die Mächtigkeit der größten Clique in  $G$  heißt **Cliquenzahl** und wird bezeichnet mit  $\omega(G)$ .

**Definition 9** Ein Graph  $G$  ist **bipartit**, wenn eine Partition von  $V = V_1 \cup V_2$  existiert, sodass  $\langle V_1 \rangle$  und  $\langle V_2 \rangle$  keine Kanten enthalten.

**Definition 10** Ein Graph  $G$  wird **split graph** genannt, wenn eine Partition von  $V = S \cup C$  existiert, sodass  $S$  eine stabile Menge ist und  $\langle C \rangle$  ein vollständiger Graph.

**Definition 11** Eine **Knotenfärbung** ist eine Zuordnung von Farben zu Knoten, sodass adjazenten Knoten verschiedene Farben zugeordnet sind.

**Definition 12** Ist ein Graph  $G$  **k-färbbar** aber nicht  $(k-1)$ -färbbar, so ist er **k-chromatisch** und  $\chi(G) = k$  ist die **chromatische Zahl** von  $G$ .

**Definition 13** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit Teilgraph  $H$ ,  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ . Dann ist  $G - V' = \langle V \setminus V' \rangle$ ,  $G - E' = (V, E \setminus E')$  und  $G - H = (V, E \setminus E(H))$ .

**Definition 14** Ein **Matching** ist eine Menge  $M \subseteq E$  von paarweise nichtadjazenten Kanten in  $G$ .

**Definition 15** Das **Komplement**  $\bar{G}$  eines Graphen  $G = (V, E)$  ist der Graph  $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ .

# Grenzen für die chromatische Zahl

**Satz 1** Eine untere Schranke für die chromatische Zahl  $\chi$  ist gegeben durch  $\omega$ .

**Satz 2** Eine obere Schranke für die chromatische Zahl  $\chi$  eines Graphen ist  $\Delta + 1$ .

**Theorem 1 (Brooks 1941)** Ist  $G$  ein zusammenhängender Graph mit  $G \not\cong K_p$  und  $G \not\cong C_{2k+1}$ , so gilt  $\chi \leq \Delta$ .

**Theorem 2** Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph der Ordnung  $p$  mit der Cliquenzahl  $\omega$  und der Stabilitätszahl  $\alpha$ . Es gilt für die chromatische Zahl  $\chi(G) \leq \frac{p+\omega+1-\alpha}{2}$ . Es gilt insbesondere  $\chi(G) \leq \frac{p+\omega-\alpha}{2}$ , wenn entweder  $\omega + \alpha = p + 1$  gilt und  $G$  kein split graph ist, oder  $\alpha + \omega = p - 1$  gilt und  $G$  keinen induzierten  $(K_{\omega+3} - C_5)$  enthält.

**Lemma 1** Für einen  $K_3$ -freien Graphen  $G$  gilt  $\chi(G) \leq \lfloor \frac{p+4}{3} \rfloor$ .

**Bemerkung 1** Die **Ramsey Zahl** (bezeichnet mit  $R(r, s)$ ) gibt die Anzahl Knoten an, die ein Graph besitzen muss, um entweder eine Clique der Größe  $r$  oder eine stabile Menge der Größe  $s$  zu enthalten. Es gilt  $R(3, 3) = 6$ .

**Theorem 3** Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph der Ordnung  $p$  mit der Cliquenzahl  $\omega$ , der Stabilitätszahl  $\alpha$ , dem Maximalgrad  $\Delta$  und der chromatischen Zahl  $\chi$ . Es gilt  $\chi \leq \min\{\Delta + 1, \frac{p+\omega+1-\alpha}{2}\}$  und insbesondere  $\chi \leq \min\{\Delta, \frac{p+\omega-\alpha}{2}\}$  wenn  $G$  kein ungerader Kreis und kein split graph ist und auch keinen induzierten  $(K_{\omega+3} - C_5)$  enthält.